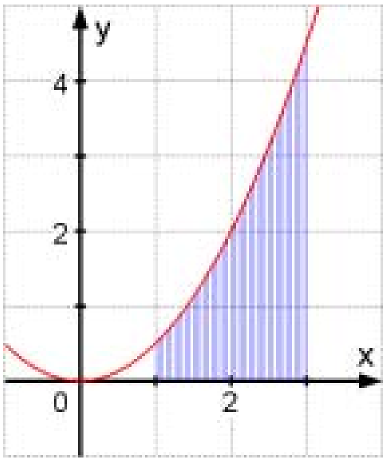
FLÄCHENBERECHNUNGEN



Teil 3:

Flächenberechnungen
mit Näherungsformeln

Ausdrucken der Datei nur von der Mathematik-CD aus möglich

Datei Nr. 48 115 SOD

Juni 2001

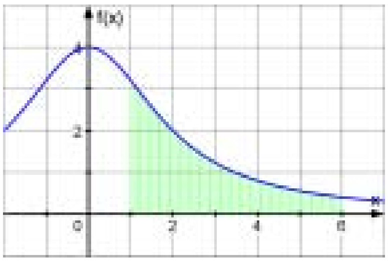
Friedrich Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

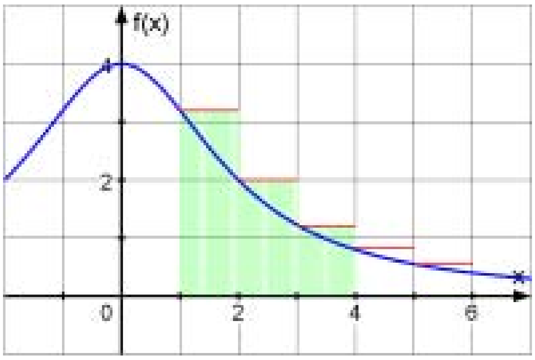
3. Näherungsverfahren zur Flächenberechnung

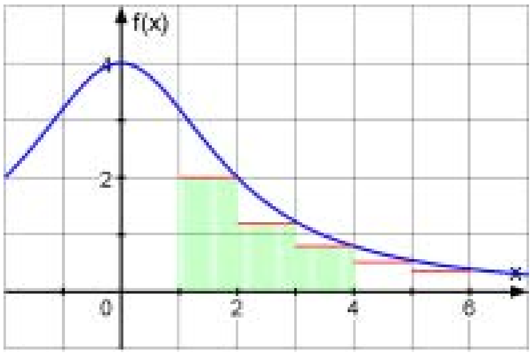
3.1 Rechtecksverfahren



Die Funktion $f(x)=\frac{16}{x^2+4}$ erfordert zur Integration die Funktion Arcustangens, die meistens in der Schule nicht behandelt wird.
Daher lautet eine gern gestellte Aufgabe:
Berechne die Fläche des krummlinigen Trapezes zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = 6.

Das Rechteckverfahren ist schon behandelt worden, und zwar in Datei 48111.
Man legt über die Kurve eine Treppe, eine andere unter die Kurve, so entstehen eine im Kru-Li-Trap liegende Fläche aus Rechtecken (genannt Untersumme), und eine Obersumme, bestehend aus Rechtecken, die das Kru-Li-Trap beinhaltet.





Berechnung der Obersumme: n Teile der Breite $h=\frac{b-a}{n}=\frac{6-1}{n}=\frac{5}{n}$.
In der Zeichnung haben wir n = 5 Teile gewählt, damit wird die Rechtecksbreite h = 1.
Weil die Kurve fällt, nehmen wir die Höhen als Funktionswerte am linken Teil-Intervall-Rand.

$$O=\left[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)\right]\cdot h=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

$$O=\tfrac{16}{5}+2+\tfrac{16}{13}+\tfrac{16}{20}+\tfrac{16}{29}\approx 7{,}78$$

Die Obersumme (Abbildung rechts) verwendet Höhen am rechten Rand:

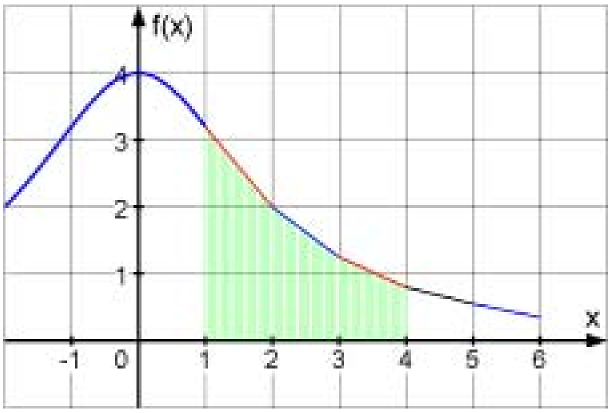
$$U=\left[f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\right]\cdot h=f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$$

$$U=2+\tfrac{16}{13}+\tfrac{16}{20}+\tfrac{16}{29}+\tfrac{16}{40}\approx 4{,}98$$

Der gesuchte Flächeninhalt liegt dazwischen, der Mittelwert aus O und U ist als Näherungswert brauchbar: $A\approx\frac{O+U}{2}=6{,}38$

(Der fast exakte Wert ist 6,283 - siehe am Ende dieses Kapitels)

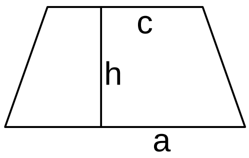
3.2 Sehnen-Trapez-Regel

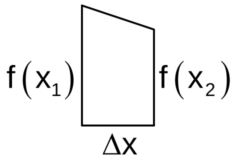


Hier zerlegt man genauso wie In 3.1 das Intervall [a ; b] in n gleichlange Teile und verbindet die Kurvenpunkte durch geradlinige Sehnenstücke. So entstehen n Trapeze, drei davon sind bunt ausgemalt.

Die Trapez-Inhalts-Formel lautet:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$





Unsere Trapeze stehen aufrecht da:

Bei äquidistanter Zerlegung ist $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Der Inhalt wird dann: $A = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(x_1)+f(x_2)\right)$

Addieren wir alle Trapezflächen, dann kommen alle inneren genau 2 mal vor, einmal als linker, einmal als rechter Rand. Also folgt nach Aufsummieren und Ausklammern:

$$A^* = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\cdot f(a+h) + 2\cdot f(a+2h) + \ldots + 2\cdot f\left(a+(n-1)h\right) + f(b)\right)$$

Oder kürzer:

$$\boxed{A^* = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(y_0 + 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + \ldots + 2\cdot y_{n-1} + y_n\right)}$$

Wenden wir diese Formeln auf unser Beispiel an, dann folgt:

$$A^* = \frac{5}{2\cdot 5}\left(f(1) + 2\cdot f(2) + 2\cdot f(3) + 2\cdot f(4) + 2\cdot f(5) + f(6)\right)$$

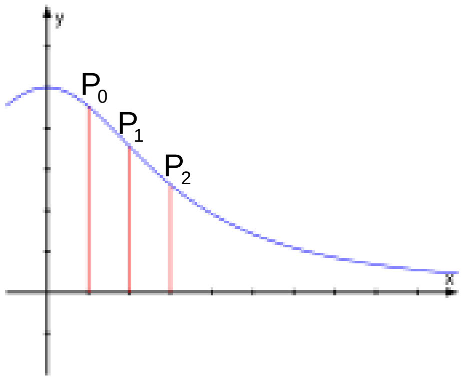
$$A^* = \tfrac{1}{2}\left(\frac{16}{1+4} + 2\cdot\frac{16}{4+4} + 2\cdot\frac{16}{9+4} + 2\cdot\frac{16}{16+4} + 2\cdot\frac{16}{25+4} + \frac{16}{36+4}\right)$$

$$A^* = 8\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{2}{13} + \frac{2}{20} + \frac{2}{29} + \frac{1}{40}\right) \approx 6{,}382$$

Das ist ziemlich genau der Näherungswert, den wir auch bei der Rechtecksmethode als Mittelwert bekommen haben.

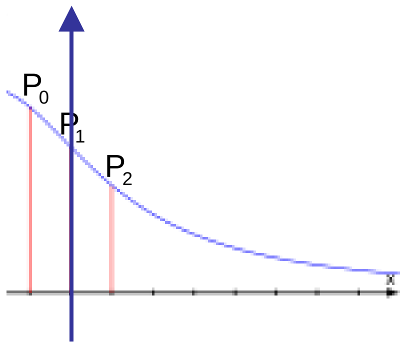
Die Sehnen-Trapezformel steht in Formelsammlungen und muß nicht auswendig gelernt werden.

3.3 Simpson-Regel



Die Simpsonsche Regel basiert auf einer genialen Idee. Um die Teilflächen noch besser an die wirkliche Kurve anzupassen, verbindet man die Eckpunkte nicht mit Sekantenstücken, sondern mit Parabelbögen. Bekanntlich kann man durch 3 Punkte eindeutig eine Parabel festlegen, denn $y = ax^2 + bx + c$ wird durch genau 3 Parameter a, b und c definiert. Also benötigt man stets drei benachbarte Punkte für ein Parabelstückchen. Sie deckt dann zwei Streifen ab. Man erkennt daraus, daß man also eine gerade Anzahl von Teilintervallen benötigt.

Hier eine Herleitung für Interessierte:



Um eine bessere Rechnung machen zu können, verschieben wir die Fläche so nach links, daß der 1. Teilpunkt P_1 genau auf der y-Achse liegt. Dann erhalten diese 3 Parabelpunkte folgende Koordinaten: $P_0(-h\,|\,y_0), P_1(0\,|\,y_1),\ P_0(h\,|\,y_2)$.

Nun machen wir den Ansatz $y = ax^2 + bx + c$.
Für a, b und c haben wir als Bedingung unsere Drei Punkte:

P_0 eingesetzt:	$y_0 = ah^2 - bh + c$	(1)	
P_1 eingesetzt:	$y_1 = c$	(2)	$\Rightarrow\ c = y_1$
P_2 eingesetzt:	$y_2 = ah^2 + bh + c$	(3)	

---

(1) + (3) liefert $\quad y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c \ \Rightarrow\ 2ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1 \ \Rightarrow\ a = \dfrac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}$

(3) - (1) liefert $\quad y_2 - y_0 = 2bh \ \Rightarrow\ b = \dfrac{y_2 - y_0}{2h}$

Nun setzen wir a, b und c in die allgemeine Parabelform ein:

$$y = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot x^2 + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot x + y_1$$

Für diesen Parabelbogen berechnen wir das zugehörige Kru-Li-Trap, also den Inhalt der beiden Streifen, die oben durch das Parabelstück begrenzt werden:

$A_1{}^* = \int_{-h}^{h} y\cdot dx =$ also:

$$A = \int_{-h}^{h}\left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot x^2 + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot x + y_1\right)dx = \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot\frac{x^2}{2} + y_1\cdot x\right]_{-h}^{h}$$

$$= \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot\frac{h^3}{3} + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot\frac{h^2}{2} + y_1\cdot h\right] - \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\cdot\frac{\left(-h^3\right)}{3} + \frac{y_2 - y_0}{2h}\cdot\frac{h^2}{2} - y_1\cdot h\right]$$

$$= \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{6}\cdot h + \frac{y_2 - y_0}{4}\cdot h + y_1\cdot h\right] - \left[-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{6}\cdot h + \frac{y_2 - y_0}{4}\cdot h - y_1\cdot h\right]$$

$$= h\left[\frac{y_o - 2y_1 + y_2}{6} + \frac{y_2 - y_0}{4} + y_1 + \frac{y_o - 2y_1 + y_2}{6} - \frac{y_2 - y_0}{4} + y_1\right]$$

$$= h\left[2 \cdot \frac{y_o - 2y_1 + y_2}{6} + 2y_1\right] = 2h \cdot \left(\frac{y_o - 2y_1 + y_2}{6} + y_1\right) = 2h \cdot \frac{y_o - 2y_1 + y_2 + 6y_1}{6}$$

$$A_1{}^* = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Für das zweite Parabeltrapez folgt analog:

$$A_1{}^* = \frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4).$$

usw.

Für die gesamte Fläche summiert man nun $\frac{n}{2}$ solche Parabel-Trapeze auf. Dabei

$$A^* = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + (y_4 + 4y_5 + y_6) + \ldots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\right]$$

$$\boxed{A^* = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_5 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right)}$$

Bemerkungen:

1. Wir haben diese Fläche vor der Berechnung in eine für die Berechnung günstige Lage verschoben. Dies hatte jedoch keinen Einfluß auf die y-Koordinaten der verwendeten Punkte, und auch die Intervallbreite h ist davon unabhängig. Also gilt diese Formel auch für die ursprüngliche Lage.

2. In Formelsammlungen steht die Formel oft anders, und zwar werden dort die Summanden zu Zweier- und Viererprodukte zusammengefaßt. Die hier stehende Formel kann man sich besser merken: Die ersten und letzten y-Werte treten *einfach* auf, dann abwechselnd 4-fach und 2-fach.

An unserem **Beispiel aus Seite 51** wollen wir die Wirksamkeit der Formel testen.

$\int_1^6 \frac{16}{x^2+4}dx$ berechnen wir näherungsweise mit 10 Teilintervallen der Breite h = 0,5

$$A^* = \frac{0{,}5}{3}\left(f(1) + 4 \cdot f(1{,}5) + 2 \cdot f(2) + 4 \cdot f(2{,}5) + 2 \cdot f(3) + 4 \cdot f(3{,}5) + 2 \cdot f(4) + 4 \cdot f(4{,}5) + 2 \cdot f(5) + 4 \cdot f(5{,}5) + f(6)\right)$$

$$A^* = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{16}{6{,}25} + 2 \cdot \frac{16}{8} + 4 \cdot \frac{16}{10{,}25} + 2 \cdot \frac{16}{13} + 4 \cdot \frac{16}{16{,}25} + 2 \cdot \frac{16}{20} + 4 \cdot \frac{16}{24{,}25} + 2 \cdot \frac{16}{29} + 4 \cdot \frac{16}{34{,}25} + \frac{16}{40}\right)$$

$$A^* = \frac{16}{6}\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{6{,}25} + \frac{2}{8} + \frac{4}{10{,}25} + \frac{2}{13} + \frac{4}{16{,}25} + \frac{2}{20} + \frac{4}{24{,}25} + \frac{2}{29} + \frac{4}{34{,}25} + \frac{1}{40}\right)$$

Ergebnis mit Taschenrechner: $A^* \approx 6{,}2825$

Im Vergleich dazu nochmals das „genaue“ Ergebnis: A=6,2831853...

3.4 Zusatz: Arcus-Tangens als Stammfunktion

Hier soll gezeigt werden, wie man dieses geheimnisvolle Integral „richtig" berechnet. Dazu muß man auf die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion zurückgreifen. Diese heißt Arcus-Tangens-Funktion:

$$f(x) = \arctan x\,.$$

Ihre Ableitung ist $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Also folgt daraus die Stammfunktion

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C}$$

Unser Integral lautete: $\displaystyle\int_1^6 \frac{16}{x^2+4}\,dx\,.$

Wir müssen es zuerst anpassen, d.h. im Nenner auf dir Form $u^2 + 1$ kommen. Dazu kürzen wir zuerst den Bruch durch 4 und substituieren anschließend:

$$\int_1^6 \frac{16}{x^2+4}\,dx = \int_1^6 \frac{4}{\frac{x^2}{4}+1}\,dx = \int_1^6 \frac{4}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = \tfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2u \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\int_1^6 \frac{16}{x^2+4}\,dx = \int_1^6 \frac{4}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \int_{0,5}^{3} \frac{4}{u^2+1}\cdot 2du = 8\int_{0,5}^{3} \frac{1}{u^2+1}\,du = 8\left[\arctan u\right]_{0,5}^{3}$$

$$= 8\left(\arctan 3 - \arctan 0,5\right) \approx 6,2831853$$

Hinweis: Zur Berechnung von Arctan-Werten muß der Taschenrechner auf Bogenmaß (RAD) eingestellt sein!