1 Erster Vortrag

1.1 Lineare Gleichungen

Der wichtigste Typ der Differentialgleichungen ist die *lineare Gleichung*. In dieser ist die Ableitung höchster Ordnung eine lineare Funktion der niedrigeren Ableitungen. Demnach ist die allgemeine Form der linearen Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x),$$

und die allgemeine Form der zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x),$$

und so weiter. Es ist klar, dass die Koeffizienten auf der rechten Seite dieser Gleichungen, also $p(x), q(x), r(x)\dots$, nur noch von x abhängen.

Als erstes kümmern wir uns um die linearen Gleichungen erster Ordnung, wir schreiben sie in der Normalform

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{1.1.1}$$

Die einfachste Methode diese zu lösen beruht auf der Tatsache, dass

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx}y) = e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + yPe^{\int P\,dx} = e^{\int P\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right). \tag{1.1.2}$$

Folglich ergibt (1.1.1) multipliziert mit $e^{\int P\,dx}$,

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx}y) = Qe^{\int P\,dx}. \tag{1.1.3}$$

Integrieren ergibt nun

$$e^{\int P\,dx}y = \int Qe^{\int P\,dx}dx + c,$$

also ist

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Qe^{\int P\,dx}dx + c\right) \tag{1.1.4}$$

die Lösung von (1.1.1).

Beispiel Löse $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x$.

Diese Gleichung ist offensichtlich linear mit $P = \frac{1}{x}$, also haben wir

$$\int P\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x \qquad \text{und} \qquad e^{\int P\,dx} = e^{\log x} = x.$$

Wenn wir nun mit x multiplizieren und (1.1.3) beachten, bekommen wir

$$\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2,$$

also

$$xy = x^3 + c \quad \text{oder} \quad y = x^2 + cx^{-1}.$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, sollte man nicht die komplizierte Formel (1.1.4) auswendig lernen und sie mechanisch auf lineare Gleichungen anwenden. Stattdessen ist es viel einfacher sich zu merken wie (1.1.4) hergeleitet wurde: *mit $e^{\int P\,dx}$ multiplizieren und integrieren.* Ein Nachteil ist vielleicht, dass alles daran hängt die Tatsache in (1.1.2) zu sehen. Mit anderen Worten fällt der Integrationsfaktor $e^{\int P\,dx}$ vom Himmel.

1.2 Reduzieren der Ordnung

Wie wir bereits gesehen haben, hat die Differentialgleichung zweiter Ordnung die Form

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

In diesem Kapitel betrachten wir zwei Typen von Gleichungen zweiter Ordnung, die mit Methoden erster Ordnung gelöst werden können.

1.2.1 Fehlende abhängige Variable

Wenn y nicht explizit gegeben ist, kann man unsere Gleichung schreiben als

$$f(x, y', y'') = 0. \tag{1.2.1}$$

In diesem Fall können wir eine neue abhängige Variable p einführen als

$$y' = p \qquad \text{und} \qquad y'' = \frac{dp}{dx}. \tag{1.2.2}$$

Diese Substitution formt (1.2.1) in die Gleichung erster Ordnung

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \tag{1.2.3}$$

um. Wenn wir eine Lösung für (1.2.3) finden, können wir p in dieser Lösung durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen, und versuchen die neue Gleichung zu lösen. Dieses Verfahren reduziert das Problem eine Gleichung zweiter Ordnung (1.2.1) zu lösen, indem man zwei Gleichungen erster Ordnung hintereinander löst.

Beispiel Löse $xy'' - y' = 3x^2$

Die Variable y fehlt in der Gleichung, also reduziert sie (1.2.2) auf

$$x\frac{dp}{dx} - p = 3x^2$$

oder

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 3x,$$

diese ist linear. Also können wir sie mit dem Vefahren von (1.1) lösen, wir erhalten

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1x,$$

also ist

$$y = x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2$$

die gewünschte Lösung.

1.2.2 Fehlende unabhängige Variable

Wenn x nicht explizit gegeben ist, kann man unsere Gleichung zweiter Ordnung schreiben als

$$g(y, y', y'') = 0. \tag{1.2.4}$$

Hier führen wir eine neue abhängige Variable p genauso ein, aber dieses Mal drücken wir y'' als Ableitung von y aus:

$$y' = p \qquad \text{und} \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \tag{1.2.5}$$

Das ermöglicht uns (1.2.4) in der Form

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{1.2.6}$$

zu schreiben; und von hier an können wir wie oben weitermachen — zwei Gleichungen erster Ordnung hintereinander lösen.

Beispiel Löse $y'' + k^2 y = 0$.

Mit Hilfe von (1.2.5) können wir dies schreiben als

$$p\frac{dp}{dy} + k^2 y = 0 \qquad \text{oder} \qquad p\,dp + k^2 y\,dy = 0.$$

Integrieren ergibt

$$p^2 + k^2 y^2 = k^2 a^2,$$

also

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm k\sqrt{a^2 - y^2}$$

oder

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm k\,dx.$$

Eine zweite Integration ergibt

$$\arcsin\frac{y}{a} = \pm kx + b,$$

also

$$y = a\sin(\pm kx + b) \qquad \text{oder} \qquad y = A\sin(kx + B).$$

Diese allgemeine Lösung kann man als

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx, \tag{1.2.7}$$

schreiben, wenn man $\sin(kx + B)$ erweitert und die Konstanten ändert.

Die Gleichung aus diesem Beispiel kommt oft in Anwendungen vor, wie wir bereits hörten. Sie ist linear, und ihre Lösung (1.2.7) wird in der allgemeinen Theorie der Gleichungen zweiter Ordnung eine wichtig Rolle spielen.